BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

УДК 517. 977

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КРИТЕРИЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Р.К.ТАГИЕВ, Р.С.КАСЫМОВА

Бакинский Государственный Университет

r.tagiyev@list.ru

Рассматривается задача оптимального управления для линейного эллиптического уравнения с критерием оптимальности по границе области. Построена разностная аппроксимация задачи, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

Ключевые слова: задача оптимального управления, эллиптическое уравнение, разностная аппроксимация.

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления невозможно без их конечномерных аппроксимаций. В практике часто для такой аппроксимации применяется разностный метод. Основными проблемами при аппроксимации задач оптимального управления являются вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу и управлению [1, гл. 3].

В работах [2-6] и др. изучены вопросы сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления для эллиптических уравнений с критерием оптимальности по рассматриваемой области.

В данной работе исследуется сходимость разностных аппроксимаций одной задачи оптимального управления для эллиптического уравнения с критерием оптимальности по части границы области. Построена разностная аппроксимация задачи, установлены априорные оценки и оценки точности погрешности разностного метода по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость по управлению и проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

Постановка задачи и ее корректность

Пусть управляемый процесс описывается в прямоугольнике $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < l_i (i = 1{,}2)\}$ линейным уравнением эллиптического типа

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)u = f(x), x \in \Omega, \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$-k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p(x)u = g(x), x \in \Gamma_{-1}, \qquad (2)$$

$$u(x) = 0, x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \qquad (3)$$

где Γ - граница прямоугольника $\Omega, \Gamma_{-1} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = 0{,}0 < x_2 < l_2\}$- левая вертикальная сторона прямоугольника Ω; $k_1(x), k_2(x), q(x), p(x) = p(0, x_2)$- заданные функции, $f(x), g(x) = g(0, x_2)$- управляющие функции, $v = (f(x), g(x))$ - управление, $u = u(x) = u(x, v)$- состояние процесса- решение задачи (1)-(3) соответствующее управлению v. Относительно заданных функций будем предполагать следующее :

$$k_i(x) \in W_\infty^1(\Omega), q(x) \in L_\infty(\Omega), p(x) \in L_\infty(\Gamma_{-1});$$

$$0 < \nu_i \le k_i(x) \le \mu_i, \left|\frac{\partial k_i}{\partial x_j}\right| \le \gamma_j^{(i)} \ (i, j = 1{,}2),$$

$$0 \le q_0 \le q(x) \le q_1 \text{ п.в. на } \Omega;\ 0 < p_0 \le p(x) \le p_1 \text{ п.в. на } \Gamma_{-1},$$

где $\nu_i, \mu_i, \gamma_i^{(j)} > 0 \ (i, j = 1{,}2), q_0, q_1 \ge 0, p_0, p_1 > 0$- заданные числа.

Введем множество допустимых управлений

$$V = F \times G \subset H = L_2(\Omega) \times W_2^1(\Gamma_{-1}),$$

$$F = \{f(x) \in L_2(\Omega) : \|f\|_{2,\Omega} \le R\},$$

$$G = \left\{g(x) \in W_2^1(\Gamma_{-1}) : g_0 \le g(x) \le g_1, \left|\frac{dg}{dx_2}\right| \le g_2 \text{ п.в. на } \Gamma_{-1}\right\}, \qquad (4)$$

где $R, g_2 > 0, g_0, g_1$ - заданные числа.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(v) = \int_{\Gamma_{-1}} |u(x, v) - u_0(x)|^2 dx \qquad (5)$$

на решениях $u = u(x,v)$ краевой задачи (1)-(3), соответствующих всем допустимым управлениям $v \in V$, где $u_0(x) = u_0(0, x_2) \in W_2^1(\Gamma_{-1})$ - заданная функция.

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм и полунорм соответствуют [7, 23] .

Под обобщенным решением краевой задачи (1)-(3) при фиксированном управлении $v \in V$ понимается функция $u(x) = u(x,v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$\iint_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + qu\eta \right) dx + \int_{\Gamma_{-1}} pu\eta ds = \iint_\Omega f\eta dx + \int_{\Gamma_{-1}} g\eta ds, \tag{6}$$

для всех $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ есть подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$ плотным множеством, в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи $\Gamma \setminus \Gamma_{-1}$.

Используя результаты из [7, 112 -116], [8, 40-42] можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ существует единственное обобщенное решение $u(x) = u(x,v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (1)-(3) и справедлива оценка.

$$\|u(x,v)\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_1 \left(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}} \right). \tag{7}$$

Кроме того, обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (1)-(3) принадлежит также пространству $W_{2,0}^1(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ и верна оценка [7, 112-133], [8, 32-46]

$$\|u(x,v)\|_{2,\Omega}^{(2)} \le M_2 \left(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)} \right). \tag{8}$$

Здесь и ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через $M_j\ (j = 1,2,..)$.

Можно доказать, что если последовательность $\{v_k\} \subset H$ слабо в H сходится к $v \in H$, то $J(v_k) \to J(v)$, т.е. функционал (5) слабо непрерывен на H и в задаче (1)-(5) множество оптимальных управлений $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* = \inf\{J(v) : v \in V\}\}$ не пусто, слабо компактно и любая минимизирующая последовательность $\{v_k\}$ слабо в H сходится к V_* [9].

Разностная аппроксимация задачи и корректность аппроксимаций

Для аппроксимации задачи (1)-(5) введем следующие сетки на $[0, l_i]$ $(i = 1,2)$ и на $\overline{\Omega}$:

$$\overline{\omega_i} = \left\{ x_i^{(j_i)} = j_i h_i \in [0, l_i],\ j_i = 0,1,....,N_i,\ N_i h_i = l_i \right\},$$

$$\omega_i = \overline{\omega}_i \cap (0, l_i), \omega_i^+ = \overline{\omega}_i \cap (0, l_i], \; \omega_i^- = \overline{\omega}_i \cap [0, l_i) \; (i = 1,2),$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \; \omega = \omega_1 \times \omega_2, \; \gamma = \overline{\omega} \setminus \omega, \; \gamma_{-1} = \{x_1 = 0\} \times \omega_2,$$

$$\gamma_{+1} = \{x_1 = l_1\} \times \omega_2, , \; \gamma_{-2} = \omega_1 \times \{x_2 = 0\}, \; \gamma_{+2} = \omega_1 \times \{x_2 = l_2\},$$

$$\gamma_{-1}^+ = \gamma_{-1} \cup (0, l_2), \; \overset{0}{\gamma}_{-1} = \gamma_{-1} \setminus (0, l_2 - h_2), \; \omega^{(-1)} = \omega \cup \gamma_{-1}.$$

Пусть $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $\hbar_i = \hbar_i(x_i) = h_i$, если $x_i \in \omega_i$ и $\hbar_i = 0{,}5h_i$, если $x_i = 0, l_i \;\; (i = 1,2)$. Введем следующие скалярные произведения и нормы для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}$ или на ее частях :

$$(u, v)_{2,\omega} = \sum_{x \in \omega} u(x) v(x) h_1 h_2, \; \|u\|_{2,\omega} = (u, u)_{2,\omega}^{1/2},$$

$$(u, v)_{2,\omega^{(-1)}} = \sum_{x \in \omega} u(x) v(x) h_1 h_2 + 0.5 \sum_{x \in \gamma_{-1}} u(x) v(x) h_1 h_2,$$

$$\|u\|_{2,\omega^{(-1)}} = (u, u)_{2,\omega^{(-1)}}^{1/2}, \; (u, v)_{2,\gamma_{-1}} = \sum_{x \in \gamma_{-1}} u(x) v(x) h_2,$$

$$\|u\|_{2,\gamma_{-1}} = (u, u)_{2,\gamma_{-1}}^{1/2}, \; (u, v]_i = \sum_{x \in \omega \cup \gamma_{+1}} u(x) v(x) h_1 h_2,$$

$$\| u] |_i = (u, u]_i^{1/2} \qquad (i = 1,2) \;, \; (u, v)_{2,\gamma_{-1}}^{(1)} = (u, v)_{2,\gamma_{-1}} + (u_{x_2}, v_{x_2})_{2,\overset{0}{\gamma}_{-1}},$$

$$\|u\|_{2,\gamma_{-1}}^{(1)} = \left((u, u)_{2,\gamma_{-1}}^{(1)}\right)^{1/2}.$$

Введем также элементарные ячейки

$$e_i(x_i) = \{\xi_i : x_i - 0.5h_i \le \xi_i < x_i + 0.5h_i\}, \; x_i \in \omega_i,$$

$$e_i(0) = \{\xi_i : 0 \le \xi_i < 0.5h_i\},$$

$$e_i(l_i) = \{\xi_i : l_i - 0.5h_i \le \xi_i \le l_i\} \; (i = 1,2), e(x) = e_1(x) \times e_2(x), x \in \overline{\omega}.$$

Пусть $\tilde{\omega} \in \overline{\Omega}$- разные сетки в области $\overline{\Omega}$. Через $L_2\left(\tilde{\omega}\right), W_2^1\left(\tilde{\omega}\right)$ будем обозначать пространства сеточных функций, определенных на соответствующих сетках $\tilde{\omega}$ с нормами $\|\cdot\|_{2,\tilde{\omega}}$, $\|\cdot\|_{2,\tilde{\omega}}^{(1)}$.

Для функций $u(x)$ непрерывного аргумента определим одномерные усредняющие операторы по Стеклову S_i по переменным $x_i (i = 1,2)$:

$$S_i u(x) = \frac{1}{\hbar_i} \int_{e_i(x_i)} u(x(\xi_i)) d\xi_i, \; x_i \in \overline{\omega}_i \;\; (i = 1,2),$$

где $x(\xi_1) = (\xi_1, x_2)$, $x(\xi_2) = (x_1, \xi_2)$.

Задаче оптимального управления (1)-(5) поставим в соответствие следующее семейство конечномерных сеточных задач оптимального управления : требуется минимизировать сеточный функционал

$$J_h(v_h)=\sum_{x\in\gamma_{-1}}\left|y(x,v_h)-\mathrm{u}_{0h}(x)\right|^2 h_2 \tag{9}$$

при условии, что $y=y(x)=y(x,v_h)$- решение следующей сеточной задачи состояния, являющейся разностной аппроксимацией краевой задачи (1)-(3) на сетке $\overline{\omega}$:

$$-\left[k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2},x_2\right)y_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}-\left[k_2\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}+q_h(x)y=f_h(x),x\in\omega\,, \tag{10}$$

$$-k_1\left(\frac{h_1}{2},x_2\right)y_{x_1}+p_h(x)y-\frac{h_1}{2}\left\{\left[k_2\left(0,x_2-\frac{h_2}{2}\right)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}-q_h(x)y+f_h(x)\right\}=g_h(x),x\in\gamma_{-1}, \tag{11}$$

$$y(x,v_h)=0,x\in\gamma\setminus\gamma_{-1}\,, \tag{12}$$

а сеточные управления $v_h=(f_h(x),g_h(x))$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$V_h=F_h\times G_h\subset \mathrm{H}_h=L_2\left(\omega^{(-1)}\right)\times W_2^1(\gamma_{-1}),$$
$$F_h=\left\{f_h(x)\in L_2\left(\omega^{(-1)}\right):\|f_h\|_{2,\omega^{(-1)}}\le R\right\},$$

$$G_h=\left\{g_h(x)=g_h(0,x_2)\in W_2^1(\gamma_{-1}):g_0\le g_h(x)\le g_1,x\in\gamma_{-1},\left|g_{hx_2}(x)\right|\le g_2,x\in\overset{0}{\gamma}_{-1}\right\}. \tag{13}$$

Здесь $u_{0h}(x)=u_0(x),p_h(x)=S_2p(x),x\in\gamma_{-1},q_h(x)=S_1S_2q(x),x\in\omega^{(-1)}$.

На основе энергетического метода можно показать, что сеточная краевая задача (10)-(12) однозначно разрешима для каждого заданного сеточного управления $v_h\in V_h$ и справедлива априорная оценка [8, 120-122]:

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(1,y_{\bar{x}_i}^2\right]_i+0.5\sum_{x\in\gamma_{-1}^{+}}y_{\bar{x}_2}^2h_1h_2+\sum_{x\in\gamma_{-1}}y^2h_2+\sum_{x\in\omega}y^2h_1h_2\right\}^{1/2}\le M_3\left(\|f_h\|_{2,\omega^{(-1)}}+\|g_h\|_{2,\gamma_{-1}}\right). \tag{14}$$

Кроме того, используя оценки (14) и конечномерный аналог теоремы Вейерштрасса [10, 74] можно доказать, что для каждого $h>0$ существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $v_{h*}\in V_h$ задачи (9)-(13), т.е. множество $V_{h*}=\{v_{h*}\in V_h:J_h(v_{h*})=J_{h*}=\inf\{J_h(v_h):v_h\in V_h\}\}$ не пусто.

Априорные оценки сеточной задачи по состоянию и по функционалу

Пусть $v=(f(\xi),g(\xi))\in V,v_h=(f_h(x),g_h(x))\in V_h$ -произвольные фиксированные управления, $u(\xi)=u(\xi,v),y(x)=y(x,v_h)$- соответствующие им решения задач (1)-(3) и (10)-(12). Обозначим через

$z(x)=z(x,v,v_h)=y(x,v_h)-u(x,v),\ \ x\in\overline{\omega}$ погрешность разностного метода по состоянию. Установим априорную оценку для погрешности $z(x)$. Разностную задачу (10)-(12) можно представить в следующей форме:

$$Ay=A_1y+A_2y=\varphi_h(x), x\in\omega\cup\gamma_{-1}, \tag{15}$$

$$y(x,v_h)=0, x\in\gamma\setminus\gamma_{-1}, \tag{16}$$

где

$$\varphi_h(x)=\begin{cases} f_h(x), & x\in\omega, \\ f_h(x)+\dfrac{2}{h_1}g_h(x), & x\in\gamma_{-1}, \end{cases} \tag{17}$$

$$A_1y=-\begin{cases} \left[k_1\left(x_1-\dfrac{h_1}{2},x_2\right)y_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}-q_h(x)y, & x\in\omega, \\ \dfrac{2}{h_1}\left[k_1\left(\dfrac{h_1}{2},x_2\right)y_{x_1}-p_h(x)y\right]-q_h(x)y, & x\in\gamma_{-1} \end{cases} \tag{18}$$

$$A_2y=-\left[k_2\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}, x\in\omega\cup\gamma_{-1}. \tag{19}$$

Используя (15)-(19) для погрешности приходим к задаче [8, 122]

$$Az=\varphi_h-Au\equiv\psi_h(x), x\in\omega\cup\gamma_{-1}, \tag{20}$$

$$z(x)=0, x\in\gamma\setminus\gamma_{-1}, \tag{21}$$

где

$$\psi_h(x)=\sum_{i=1}^{2}[\eta_i(x)]_{x_i}+\eta_3(x)+\eta_4(x), x\in\omega, \tag{22}$$

$$\psi_h(x)=\frac{2}{h_1}\left[k_1\left(\frac{h_1}{2},x_2\right)u_{x_1}-p_h(x)u\right]-\frac{2}{h_1}\left[S_2\left(k_1\left(\frac{h_1}{2},x_2\right)\frac{\partial u\left(\frac{h_1}{2},x_2\right)}{\partial x_1}\right)-S_2\left(p(0,x_2)u(0,x_2)\right)\right]+$$

$$+\left[k_2\left(0,x_2-\frac{h_2}{2}\right)u_{\bar{x}_2}-S_1\left(k_2\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)\frac{\partial u\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)}{\partial x_2}\right)\right]_{x_2}+$$

$$+\eta_3(x)+\eta_4(x)+\frac{2}{h_2}\eta_5(x), x\in\gamma_{-1}, \tag{23}$$

$$\eta_i(x)=k_i^{(-0.5i)}u_{\bar{x}_i}-S_{3-i}\left(k_i^{(-0.5i)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\ (i=1,2), x\in\omega, \tag{24}$$

$$\eta_3(x)=S_1S_2(q(x)u(x))-S_1S_2(q(x))u(x), x\in\omega\cup\gamma_{-1}, \tag{25}$$

$$\eta_4(x)=f_h(x)-S_1S_2f(x), x\in\omega\cup\gamma_{-1}, \tag{26}$$

$$\eta_5(x)=g_h(x)-S_2g(x), x\in\gamma_{-1}\ . \tag{27}$$

Здесь $k_1^{(-0.5_1)}=k(x_1-0.5h_1,x_2),\ \ k_2^{(-0.5_2)}=k(x_1,x_2-0.5h_2)$,

Теорема 1. Пусть $v=(f(\xi),g(\xi))\in V, v_h=(f_h(x),g_h(x))\in V_h$ - произвольные управления, $u(\xi,v), y(x,v_h)$ - соответствующие им решения задач (1)-(3) и (10)-(12). Тогда для любых $h>0$ справедлива оценка

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(1,z_{\bar{x}_i}^2\right]_i+0.5\sum_{x\in\gamma_{-1}^+}z_{\bar{x}_2}^2h_1h_2+\sum_{x\in\gamma_{-1}}z^2h_2+\sum_{x\in\omega}z^2h_1h_2\right\}^{1/2}\le$$

$$\le M_4\left(|h|\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}+\|f_h(x)-S_1S_2f(x)\|_{2,\omega^{(-1)}}+\|g_h(x)-S_2g(x)\|_{2,\gamma_{-1}}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Умножая обе части (15) скалярно на z и применяя формулы суммирования по частям [8, 52] приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^{(-0.5i)},z_{\bar{x}_i}^2\right]_i+\sum_{x\in\gamma_{-1}}p_h(x)z^2h_2+\sum_{x\in\omega}q_h(x)z^2h_1h_2+0.5\sum_{x\in\gamma_{-1}}q_h(x)z^2h_1h_2+$$

$$+0.5\sum_{x\in\gamma_{-1}^+}z_{\bar{x}_2}^2h_1h_2+\sum_{x\in\gamma_{-1}}z^2h_2+\sum_{x\in\omega}z^2h_1h_2=-\sum_{i=1}^{2}\left(\eta_i,z_{\bar{x}_i}\right]_i+(\eta_3,z)_{2,\omega^{(-1)}}+(\eta_4,z)_{2,\omega^{(-1)}}+$$

$$+(\eta_5,z)_{2,\gamma_{-1}}-\sum_{x\in\gamma_{-1}}\left[p_h(x)u(x,v)-S_2(p(x)u(x,v))\right]z(x)h_2-$$

$$-\sum_{x\in\gamma_{-1}^+}\left[k_2\left(0,x_2-\frac{h_2}{2}\right)u_{\bar{x}_2}-S_1\left(k_1\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)\frac{\partial u\left(x_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)}{\partial x_2}\right)\right]z_{\bar{x}_2}h_2\ .$$

Учитывая здесь условия $0<\nu_i\le k_i(x)\le\mu_i\ \ (i=1,2)$, $0\le q_0\le q(x)\le q_1$ п.в. на Ω, $0<p_0\le p(x)\le p_1$, п.в. на Γ_{-1}, и рассуждая аналогично работе [8, 122] приходим к оценке

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(1,z_{\bar{x}_i}^2\right]_i+0.5\sum_{x\in\gamma_{-1}^+}z_{\bar{x}_2}^2h_1h_2+\sum_{x\in\gamma_{-1}}z^2h_2+\sum_{x\in\omega}z^2h_1h_2\right\}^{1/2}\le M_5\left\{\sum_{i=1}^{2}\|\eta_i]|_i+\|\eta_3\|_{2,\omega(-1)}+\|\eta_4\|_{2,\omega(-1)}+\right.$$

$$\left.+\|\eta_5\|_{2,\gamma_{-1}}+\left[\sum_{x\in\gamma_{-1}}|u(x)-S_2u(x)|^2h_2\right]^{1/2}\right\}. \tag{29}$$

В работе [8, 117, 123] доказана, что справедливы неравенства

$$|\eta_i(x)| \le M_{5+i}|h|(h_1h_2)^{-1/2}|u|^{(2)}_{2,e(x)}, x\in\omega,(1,2), \tag{30}$$

$$|\eta_2(x)| \le M_8|h|(h_1h_2)^{-1/2}|u|^{(2)}_{2,e(x)}, x\in\gamma_{-1}, \tag{31}$$

$$|u(x)-S_2u(x)| \le M_9|h|(h_1h_2)^{-1/2}|u|^{(2)}_{2,e(x)}, x\in\gamma_{-1}. \tag{32}$$

Оценим теперь функционал $\eta_3(x)$ определяемый по формуле (25). Используя формулы (25) и неравенства Коши- Буняковского получим

$$|\eta_3(x)| = |S_1S_2(q(x)u(x)) - S_1S_2(q(x))u(x)| = \left|\frac{1}{\hbar_1h_2}\iint\limits_{e(x)} q(\xi)(u(\xi)-u(x))d\xi\right| \le$$

$$\frac{1}{\hbar_1h_2}\left(\iint\limits_{e(x)} q^2(\xi)d\xi\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{e(x)}(u(\xi)-u(x))^2d\xi\right)^{1/2} \le q_1(\hbar_1h_2)^{-1/2}\left(\iint\limits_{e(x)}(u(\xi)-u(x))^2d\xi\right)^{1/2}, x\in\omega\cup\gamma_{-1}.$$

Учитывая здесь неравенство [8, с. 142]

$$\left(\iint\limits_{e(x)}|u(\xi)-u(x)|^2d\xi\right)^{1/2} \le M_{10}|h||u|^{(2)}_{2,e(x)}, x\in\omega^{(-1)},$$

получим оценку

$$|\eta_3(x)| \le M_{11}(\hbar_1h_2)^{-1/2}|h||u|^{(2)}_{2,e(x)}, x\in\omega^{(-1)}. \tag{33}$$

Подставляя найденные оценки (30)-(33) в (29), приходим к оценке (28). Теорема 1 доказана.

Установим теперь оценку погрешности сеточного функционала $J_h(v_h)$ задачи (9)-(13). Пусть $\mu(x)=\mu(0,x_2)$, $x\in\bar\gamma_{-1}$ - сеточная функция заданная на сетке $\bar\gamma_{-1}$ и такая, что $\mu(0,0)=\mu(0,l_2)=0$. Через $R_h\mu(\xi)$, $\xi\in\bar\Gamma_{-1}$ будем обозначать кусочно-постоянное восполнение на $\bar\Gamma_{-1}$ сеточной функции $\mu(x), x\in\bar\gamma_{-1}$ определяемое по формуле

$$R_h\mu(\xi)=\mu(x), \xi\in e(x), \quad x\in\bar\gamma_{-1}. \tag{34}$$

Лемма 1. Пусть $\mu(\xi)\in \overset{0}{W}{}^1_2(\Gamma_{-1})$- некоторая функция, $\mu(x), x\in\bar\gamma_{-1}$ - значения функции $\mu(x)$ на узлах сетки $\bar\gamma_{-1}$. Тогда справедливы оценки

$$\|\mu(x)\|_{2,\bar\gamma_{-1}} = \|R_h\mu(\xi)\|_{2,\Gamma_{-1}} \le M_{12}\|\mu(\xi)\|^{(1)}_{2,\Gamma_{-1}}, \tag{35}$$

$$\|\mu(\xi)-R_h\mu(\xi)\|_{2,\Gamma_{-1}} \le h_2\left\|\frac{d\mu(0,\xi_2)}{d\xi_2}\right\|_{2,\Gamma_{-1}}. \tag{36}$$

Доказательство. Используя очевидное неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ и неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|\mu(x)\|^2_{2,\bar{\gamma}_{-1}} = \sum_{x\in\gamma_{-1}} \mu^2(x)\hbar_2 = \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \mu^2(0,x_2)d\xi_2 = \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left|\mu(0,x_2)-\mu(0,\xi_2)+\mu(0,\xi_2)\right|^2 d\xi_2 \le$$

$$\le 2\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\left(\int_{\xi_2}^{x_2} \frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2} d\nu_2\right)^2 + \mu^2(0,\xi_2)\right] d\xi_2 \le$$

$$\le 2\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\hbar_2 \int_{e_2(x_2)} \left|\frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2}\right|^2 d\nu_2 + \mu^2(0,\xi_2)\right] d\xi_2 \le$$

$$\le 2\left(l_2\left\|\frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2}\right\|^2_{2,(0,l_2)} + \|\mu(0,\nu_2)\|^2_{2,(0,l_2)}\right) \le M_{12}^2 \|\mu(\xi)\|^2_{2,\Gamma_{-1}},$$

где $M_{12} = (2\max(l_2,1))^{1/2}$. Отсюда следует справедливость оценки (35).

Докажем оценку (36). Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\|\mu(\xi)-R_h\mu(\xi)\|^2_{2,\Gamma_{-1}} = \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left|\mu(0,\xi_2)-\mu(0,x_2)\right|^2 d\xi_2 = \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left(\int_{x_2}^{\xi_2} \frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2} d\nu_2\right)^2 d\xi_2 \le$$

$$\le \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left(\hbar_2 \int_{e_2(x_2)} \left|\frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2}\right|^2 d\nu_2\right) d\xi_2 \le h_2^2 \sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left|\frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2}\right|^2 d\nu_2 = h_2^2 \left\|\frac{d\mu(0,\nu_2)}{d\nu_2}\right\|^2_{2,\Gamma_{-1}}.$$

Отсюда следует оценка (36). Лемма 1 доказана.

Теорема 2. Для любых управлений $v \in V$ и $v_h \in V_h$ задач оптимального управлений (1)-(5) и (9)-(13) соответственно и любых $h > 0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(v_h)$ задачи (9)-(13) справедлива оценка

$$|J(v)-J_h(v_h)| \le M_{13}\left(|h| + \|f_h(x)-S_1S_2 f(x)\|_{2,\omega^{(-1)}} + \|g_h(x)-S_2 g(x)\|_{2,\gamma_{-1}}\right). \quad (37)$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ и $v_h \in V_h$- произвольные управления, а $u(\xi,v)$ и $y(x,v_h)$- соответствующие им решения задач (1)-(3) и (10)-(12). Используя (5) и (9), имеем

$$J(v)-J_h(v_h) = A_h^{(1)}(v,v_h) + A_h^{(2)}(v,v_h), \quad (38)$$

где

$$A_h^{(1)}(v,v_h) = \|u(\xi,v)-u_0(\xi)\|^2_{2,\Gamma_{-1}} - \|R_h u(\xi,v) - R_h u_{0h}(\xi)\|^2_{2,\Gamma_{-1}},$$

$$A_h^{(2)}(v,v_h) = \|R_h u(\xi,v) - R_h u_0(\xi)\|^2_{2,\Gamma_{-1}} - \|y(x,v_h)-u_{0h}(x)\|^2_{2,\Gamma_{-1}}.$$

Нетрудно убедиться, что для величин $A_h^{(1)}(v,v_h)$, $A_h^{(2)}(v,v_h)$ справедливы следующие оценки:

$$\left| A_h^{(1)}(v,v_h)\right| \le \left\|u(\xi,v)-R_h u(\xi,v)\right\|_{2,\Gamma-1}+\left\|u_0(\xi)-R_h u_{0h}(\xi)\right\|_{2,\Gamma-1}\Big[\left\|u(\xi,v)\right\|_{2,\Gamma-1}+$$
$$+\left\|R_h u(\xi,v)\right\|_{2,\Gamma-1}+\left\|R_h z_h(\xi)\right\|_{2,\Gamma-1}+\left\|u_0(\xi)\right\|_{2,\Gamma-1}\Big],$$
$$\left|A_h^{(2)}(v,v_h)\right| \le \left\|y(x,v_h)-u(x,v)\right\|_{2,\gamma-1}\Big[\left\|y(x,v_h)\right\|_{2,\gamma-1}+\left\|u(x,v)\right\|_{2,\gamma-1}+2\left\|u_{0h}(x)\right\|_{2,\gamma-1}\Big]$$

Тогда, проводя оценки правых частей этих неравенств на основе оценок (7),(14),(35),(36),(28) и принимая по внимание представление (38) получаем оценку (37). Теорема 2 доказана.

Сходимость сеточных задач по функционалу и управлению. Регуляризация аппроксимаций

Определим некоторые восполнения на Ω и Γ_{-1} сеточных управлений. Для сеточного управления $f_h(x)$, $x\in\omega^{(-1)}$ построим кусочно-постоянное восполнение на Ω по формуле

$$P_h^{(1)} f_h(\xi)= f_h(x), \xi\in e^*(x), x\in\omega^{(-1)}, \tag{39}$$

где

$$e^*(x)=e_1^*(x_1)\times e_2^*(x_2), e_1^*(x_1)=e_1(x_1), x_1=0,h_1,...,l_1-2h_1, e_1^*(l_1-h_1)=\{\xi_1 : l_1-1{,}5h_1\le\xi_1\le l_1\},$$
$$e_2^*(h_2)=\{\xi_2 : 0\le\xi_2<1{,}5h_2\}, e_2^*(x_2)=e_2(x_2), x_2=2h_2,3h_2,....,l_2-2h_2,$$
$$e_2^*(l_2-h_2)=\{\xi_2 : l_2-1{,}5h_2\le\xi_2\le l_2\}.$$

Для сеточного управления $g_h(x)=g_h(0,x_2), x\in\gamma_{-1}$ построим полилинейное восполнение на Γ_{-1}. Продолжим функцию $g_h(x_2), x_2\in\omega_2$ на ϖ_2, пологая $g_h(0,0)=g_h(0,h_2)$, $g_h(0,l_2)=g_h(0,l_2-h_2)$. Пусть $P_h^{(2)}g_h(\xi_2), \xi_2\in\overline{\Gamma}_{-1}$- полилинейное восполнение сеточного управления $g_h(x), x\in\overline{\gamma}_{-1}$ на Γ_{-1} определяемое по формуле

$$P_h^{(2)}g_h(\xi)=g_h(x)+g_{h\bar{x}_2}(x)(\xi_2-x_2), \xi_2\in\tilde{e}_2(x_2), x_2\in\omega_2^+, \tag{40}$$

где $\tilde{e}_2(x_2)=\{\xi_2 : x_2-h_2\le\xi_2\le x_2\}, x_2\in\omega_2^+$.

Определим теперь некоторые дискретизации управлений непрерывного аргумента. Пусть

$$Q_h^{(1)} f(x)=S_1S_2 f(x), x\in\omega^{(-1)} \tag{41}$$

усреднение функционального управления $f(\xi), \xi\in\Omega$, и

$$Q_h^{(2)}g(x)=g_h(x), x\in\gamma_{-1} \tag{42}$$

значения функционального управления $g(\xi), \xi\in\Gamma_{-1}$ в узлах сетки γ_{-1}.

Введем отображения $P_h : \mathrm{H}_h\to\mathrm{H}$, $Q_h : \mathrm{H}\to\mathrm{H}_h$, действующие по правилам $P_h v_h = v$, где $v_h=(f_h(x),g_h(x)), v=(P_h^{(1)} f_h(\xi),P_h^{(2)}g_h(\xi))$; $Q_h v=v_h$, где $v = \left(f(\xi), g(\xi)\right), v_h = \left(Q_h^{(1)} f(x), Q_h^{(2)} g(x)\right)$. Нетрудно показать, что для любых управлений $v_h \in V_h, v \in V$ имеют место включения $P_h v_h \in V, Q_h v \in V_h$.

Лемма 2. Для любых управлений $v \in V, v_h \in V_h$ справедливы оценки

$$\left|J(v) - J_h(Q_h v)\right| \le M_{14}|h|, \tag{43}$$

$$\left|J(P_h v_h) - J_h(v_h)\right| \le M_{15}|h|. \tag{44}$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ - произвольное управление. Пологая $v_h = Q_h v$ в (37) и учитывая (41),(42), получим оценку (44).

Теперь пусть $v_h \in V_h$ -произвольное сеточное управление. Полагая $v = P_h v_h$ в (37) и учитывая (39), (40), получим оценку (44). Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь вопросы сходимости разностных аппроксимаций (9)-(13) задачи (1)-(4) при $|h| \to 0$. Пусть при каждом $h = (h_1, h_2)$ и при соответствующей сетке $\overline{\omega}$ с помощью какого-либо метода минимизации [10] получены приближенные значения $J_{h*} + \varepsilon_h$ нижних граней $J_{h*} = \inf\{J_h(v_h) : v_h \in V_h\}$ функций $J_h(v_h)$ на V_h и найдены сеточные управления $v_{h\varepsilon} \in V_h$ такие, что

$$J_{h*} \le J_h(v_{h\varepsilon}) \le J_{h*} + \varepsilon_h, v_{h\varepsilon} \in V_h, \tag{45}$$

где $\varepsilon_h \ge 0$ и $\varepsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда сеточные задачи управления (9)-(13) аппроксимирует задачу (1)-(4) по функционалу и справедлива оценка скорости сходимости

$$\left|J_{h*} - J_*\right| \le M_{16}|h|.$$

Кроме того, если последовательность управлений $\{v_{h\varepsilon}\} \subset V_h$ определена из условий (45), то последовательность управлений $\{P_h v_{h\varepsilon}\}$ является минимизирующей для задачи (1)-(4), справедлива оценка

$$0 \le J(P_h v_{h\varepsilon}) - J_* \le M_{17}|h| + \varepsilon_h,$$

и последовательность управлений $\{P_h v_{h\varepsilon}\}$ слабо в H сходится к множеству V_* оптимальных управлений задачи (1)-(4).

Доказательство теоремы 3 следует из оценок (43)-(45) и из результатов работы [1, 307].

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по управлению разностных аппроксимаций (9)-(13). Для получения минимизирующей последовательности сходящейся по норме пространства H к множеству V_*, воспользуемся методом регуляризации Тихонова [1, 325]. При каждом h и соответствующий сетке $\overline{\omega}$ введем сеточную функцию Тихонова

$$T_h(v_h) = J_h(v_h) + \alpha_h \|v_h\|^2_{H_h}, v_h \in V_h,$$

где $\alpha_h > 0$ и $\alpha_h \to 0$ при $h \to 0$. Рассмотрим задачу минимизации функции $T_h(v_h)$ на V_h. При каждом $h > 0$ и соответствующий сетке $\overline{\omega}$ определим сеточное управление $v_h^{(\delta)} \in V_h$ такое, что

$$T_{h*} \equiv \inf\{T_h(v_h) : v_h \in V_h\} \le T_h(v_h^{(\delta)}) \le T_{h*} + \delta_h \quad , \qquad (46)$$

где $\delta_h \ge 0$ и $\delta_h \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, последовательность управлений $\{v_h^{(\delta)}\}$ определена из условий (46), параметры α_h, δ_h таковы, что $\alpha_h > 0, \delta_h \ge 0$, $\alpha_h, \delta_h \to 0$, $(|h| + \delta_h)/\varepsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$.

Тогда последовательность управлений $\{P_h v_h^{(\delta)}\}$ является минимизирующей для задачи (1)-(4) и сильно в H сходится к множеству Ω - нормальных оптимальных управлений $V_{**} = \{v_* \in \Omega(v_*) = \inf\{\Omega(v) : v_* \in V_*\}\}$. задачи (1)-(4), где $\Omega(v) = \|v\|^2_H = \|f\|^2_{2,\Omega} + (\|g\|^{(1)}_{2,\Gamma-1})^2$.

Доказательство теоремы следует из результатов работы [1, 326] и из полученных выше результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа, Уфимский гос. ун-т., 1999, 243 с.
3. Тагиев Р.К. Об оценке скорости сходимости разностных аппроксимаций и регуляризации задач оптимального управления для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 1989, т. 25, №9, с. 42-45
4. Тагиев Р.К. Оценка точности разностных аппроксимаций и регуляризация задачи оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения // Тематический сборник научных трудов БГУ "Математическое моделирование и автоматизированные системы ", 1990, с. 42-48
5. Бурковская В.Л., Макаров В.П. О применимости метода сеток и метода прямых к решению одного класса задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, №4, с. 798-805.
6. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квази линейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Ж. вычисл. матем. и матем.физ., 2007, т. 47, №3, с. 376-396.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука,1973. 408 с.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая Школа, 1987, 296 с.

9. Касымова Р.С. Об одной задаче оптимального управления для линейного эллиптического уравнения //Научные известия ЛГУ, 2014, с.53-61.
10. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN OBLASTIN SƏRHƏDİ ÜZRƏ OPTİMALLIQ KRİTERLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN FƏRQLƏR APPROKSİMASİYASI VƏ REQULYARLAŞDIRILMASI

R.Q.TAĞIYEV, R.S.QASIMOVA

XÜLASƏ

İşdə xətti elliptik tənlik üçün oblastın sərhədi üzrə optimallıq kriterli optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin fərqlər approksimasiyası qurulur, approksimasiyaların vəziyyətə və funksionala görə xəta qiymətləndirmələri alınır və idarəediciyə görə zəif yığılma isbat olunur. Approksimasiyaların Tixonov mənada requlyarlaşdırılması prosesi aparılır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə məsələsi, elliptik tənlik, fərqlər approksimasiyasi

DIFFERENCE APPROXIMATIONS AND REGULARIZATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH OPTIMALITY CRITERION ON THE BOUNDARY

R.G.TAGIYEV, R.S.GASIMOVA

SUMMARY

The paper studies an optimal control problem for linear elliptic equations with the optimality criterion for the boundary. The difference approximation of the problem has been built, the estimates of the accuracy of the approximation of the functional have been received and weak convergence of management has been proven. Tikhonov regularization of approximations has been held.

Key words: optimal control problem, elliptic equation, difference approximation

Поступила в редакцию: 18.05.2015 г.
Подписано к печати: 17.11.2015 г.